Capítulo 2

Determinantes

2.1. Introducción. Definiciones

Si nos centramos en la resolución de un sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ con A una matriz $n \times n$, podemos calcular A^{-1} y la resolución es inmendiata. El problema es que calcular A^{-1} es costoso. Existen otras formas de calcular A^{-1} que involucran al concepto de determinante de una matriz. Si bien es una alternativa que tampoco es eficaz desde el punto de vista computacional, sirve como herramienta para establecer una importante relación entre el rango y la anulación de ciertos determinantes dentro de una una matriz.

Comenzamos viendo la relación que hay entre las soluciones de un sistema y los determinantes que surgen de la matriz ampliada del sistema.

Sea el sistema de ecuaciones y dos incógnitas cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \tag{2.1}$$

Realizamos operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \overset{a_{11}\neq 0, a_{21}\neq 0}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}b_2 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array}\right)$$

con lo que

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

También podemos pasar de la segunda matriz a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & b_1a_{21} - a_{11}b_2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}b_2 \end{array}\right)$$

para llegar a que

$$x_1 = \frac{b_1a_{21} - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}$$

En ambos casos el número $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ juega un papel fundamental, es lo que se conoce como determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y se denota por $\det(A)$ ó $|A|$.

NOTA 2.1 *Se puede demostrar que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ entonces todas las operaciones de arriba tienen sentido. En particular notamos ve que si $\det(A) \neq 0$ entonces a_{11} y a_{21} no pueden ser cero a la vez.*

PROPOSICIÓN 2.1 (FÓRMULA DE CRAMER PARA SISTEMAS 2×2) *El sistema de matriz ampliada (2.1) tiene solución única si $\det(A) \neq 0$,y en tal caso ésta se expresa como*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

La situación es igual para sistemas de orden superior cuya matriz de coeficientes sea cuadrada. De hecho se cumple que sobre el sistema de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

llevamos a cabo una serie de operaciones elementales llegamos a

$$\begin{aligned} & x_1 \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) \\ = \ & b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

como el factor que acompaña a x_1 en la fórmula anterior, esto es

$$\det(A) = |A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{13}|A_{31}|$$

donde por A_{ij} se denota la matriz que se obtiene de A eliminando de ésta la fila i y la columna j; a $|A_{ij}|$ se le llamam menor (i,j) de la matriz A.

DEFINICIÓN 2.1 (DEFINICIÓN GENERAL DE DETERMINANTE) *Dada una matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

definimos su determinante, que se denotará por $\det(A)$ *ó* $|A|$, *como*

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + ... + (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + ... + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|.$$

EJEMPLO 2.1 *Calcular el determinante* $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & e^{-3} \\ \frac{1}{2} & e^{3} \end{vmatrix}$ *es inmediato. Bsta usar la definición de determinante para matrices* 2×2:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & e^{-3} \\ \frac{1}{2} & e^{3} \end{vmatrix} = \sinh 3$$

EJEMPLO 2.2 *También es sencillo probar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

para cualquiera que sean los valores a, b *y* c.

EJEMPLO 2.3 *Como se desprende de la definición general de determinante la estrategia de cálculo es ir reduciendo el orden de los determinantes. Por ejemplo para probar*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

basta con descomponer el cáclulo de una de orden 4 en varias de orden 3. Así

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

lo que da como resultado final $|A| = 4$.

2.2. Propiedades de los determinantes

Las propiedades fundamentales para el cálculo y manejo de los determinantes son:

1. Si una matriz tiene una fila de ceros, entonces su determinante es cero.

2. Se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   cualquiera que sea i, $i = 1, ..., n$.

3. Si B es la matriz que se obtiene de A multiplicando por r una de sus filas entonces

$$|B| = r\,|A|\,.$$

4. Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos de sus filas, entoncces
$$|B| = -|A|.$$

5. Si una matriz tiene dos de sus fila iguales, entonces su determinante es cero

6. Si B es la matriz que se obtiene de A sumando un múltiplo de una fila de A a otra de A, entonces $|B| = |A|$.

7. $|I_n| = 1$ para todo n.

8. El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principla (los a_{ii}).

9. Hay distintas defenciones(todas son equivalentes). Una de ellas es la del desarrollo por la fila i : el determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ dada en (2.2) es
$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + ... + (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| + ... + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$
cualquiera que sea el i entre 1 y n.

10. Dada una matriz A definimos sus adjunta, A^T, como la matriz que resulta de A tranformando las filas de A en columnas para A^T. Hecho esto se puede probar que si A es cuadrada entonces A^T también lo es, y en tal caso
$$|A| = \left|A^T\right|.$$
Esto significa que las operaciones elementales que hacemos entre filas, sin cambiar el valor del determinante, también pueden hacerse entre columnas si lo que se persigue es el valor del determinante.

11. Otra manera calcular el determinante de (2.2) es mediante el desarrollo por la j-ésima columna:
$$|A| = (-1)^{1+j} a_{i1} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{i2} |A_{2j}| + ... + (-1)^{i+j} |A_{ij}| + ... + (-1)^{n+j} |A_{nj}|$$

12. Si A y B son dos matrices del mismo orden, entonces
$$|AB| = |A| |B|$$

Ahora haremos algunos ejercicios de cálculo de determinantes. La estrategia, en general es hacer operaciones elementales que no varien el valor del determinante, hasta llegar a una matriz para la que es sencillo el cáclulo de su determinante.

Ejercicio 2.1 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 20$$

Ejercicio 2.2 *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & ... & a & a \\ a & x & a & ... & a & a \\ a & a & x & ... & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & ... & x & a \\ a & a & a & ... & a & x \end{pmatrix}$$

Hacemos, sin cambiar el valor del determinante, $F_j - F_1$*:*

$$\begin{vmatrix} x & a & a & ... & a & a \\ a & x & a & ... & a & a \\ a & a & x & ... & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & ... & x & a \\ a & a & a & ... & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & a & ... & a & a \\ a-x & x-a & 0 & ... & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & ... & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & ... & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

Si ahora hacemos $C_1 - C_2$, $C_1 - C_3$, ... *y* $C_1 - C_n$ *(o a la vez,* $C_1 - \sum_{j=2}^{n} C_j$*) entonces*

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x-na & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x-na)(x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3 *Empleando algunas de las propiedades anteriores se llega a que*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

Ejercicio 2.4 *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Para ello observamos que

$$A = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

que

$$\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -2abc \text{ y } \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$$

y que por tanto $|A| = 4a^2b^2c^2$.

2.3. Inversa de una matriz y Regla de Cramer

En esta sección relacionamos la invertibilidad de uan matriz, su determinante y la solubilidad del sistema que puede definir.

Teorema 2.2 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es invertible.*
2. $r(A) = n$.
3. $\det(A) \neq 0$.

La equivalencia entre 1 y 2 ya fue probada en el capítulo previo[1].

Sea ahora una matriz cuadrada con detrerminante no nulo. Se sabe que

$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + ... + (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| + ... + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$;

si llamamos $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ entonces

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_{ij}$$

Definimos la matriz de cofactores de A como

$$cof(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & \ddots & c_{2n} \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Aunque para el cálculo se requiere cierto tiempo, se prueba que

$$A\,(cof(A))^T = \begin{pmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|\, I_n$$

y por tanto que

$$A^{-1} = \frac{(cof(A))^T}{|A|}$$

El resultado anterior se puede llevar a la resolución del sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ya que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= A^{-1}\overrightarrow{b} = \frac{(cof(A))^T}{|A|}\overrightarrow{b} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & \ddots & c_{2n} \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1]Para probar el resto se ha de demostrar previamente que si el rango de una matriz cuadrada entonces las operaciones elementales la convierten en la matriz identidad y que cada operación elemental se corresponde con la multiplicación de la matriz por otra, llamada elemental, cuyo determinante es no nulo.

De esto se desprende (igualando componente a componente) que

$$x_j = \frac{1}{|A|} |A_j| .$$

TEOREMA 2.3 *Si* $|A| \neq 0$ *entonces* $A^{-1} = \frac{(cof(A))^T}{|A|}$ *y además el sistema* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *tiene como solución a* $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ *donde* $x_j = \frac{1}{|A|} |A_j|$ *.*

2.4. Rango y resolución de sistemas

Estudiamos la relación existente entre el rango de una matriz A, no necesariamente cuadrada, y el orden de ciertos determinantes no nulos de matrices que se obtienen de A.
Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se denomina menor de orden k al determinante de cualquier matriz de orden k formada con los elementos de la intersección de k cualesquiera de sus filas y k cualesquiera de sus columnas. Por ejemplo, la matriz 3×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene 4 menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Los menores de orden 1 son los elementos de la matriz. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces sólo hay un menor de orden n, es $\det(A)$.

TEOREMA 2.4 *Si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *es una matriz no nula entonces siempre existe un único número* R *que verifica:*

1. A posee al menos un menor no nulo de orden R

2. Todo menor de A de orden superior a R es nulo (o no existe cuando $R = \text{mín}\{m, n\}$).

   Además se cumple que
   $$R = r(A).$$

NOTA 2.2 *Los menores básicos no dejan de ser nulos cuando se traspone la matriz entonces. Tambien sucede que los menores no dejan de anularse cuando llevamos a cabo operaciones elementales.*

PROPOSICIÓN 2.5 *El número máximo de vectores columna l.i. de una matriz coincide con el número máximo de vectores fila l.i. Por consiguiente, el determinante de una matriz cuadrada es cero sii una de sus filas (columnas) es combinación lineal de la s filas (columnas) restantes de la matriz.*

Cualquier menos no nulo de A de orden R recibe el nombre de menor básico. Veamos algún ejemplo.

EJEMPLO 2.4 *Todo menor de orden 3 de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Un menor básico, por ejemplo, es $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. *Así pues* $R = 2$.
Observamos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que el rango no puede ser 3, es 2 *pues* $k = 2$ *y* $k = 4 - r(A)$.

EJEMPLO 2.5 *Hacemos lo mismo con*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Teenmos que

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 12 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

y vemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego $R = 3$.

Ejemplo 2.6 *Podemos, mediante el mismo procedimiento verificar que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3. En efecto,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y esta matriz tiene determinante -1.

Aplicamos todo lo anterior para resolver sistemas compatibles.
Supongamos que el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ tiene solución. Porcedemos como sigue:

1. Detectamos un menor básico de A
2. Suprimimos las filas no básicas de A
3. Situamos a la derecha las columnas no básicas de A con sus correspondientes incógnitas
4. Resolvemos por Cramer o Gauss

Ejemplo 2.7 *Sea el sistema cuya matriz ampliada es*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto deducimos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ *es un menor básico y que* $R = r(\overline{A}) = r(A) = 2$. *Procedemos como se ha indicado:*

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ *es un menor básico*

2. *nos quedamos con las dos primeras filas y eliminamos la tercera para considerar el sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$$

3. *situamos a la derecha los elementos no básicos:*

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 - 3x_1 - 4x_2 \\ 2x_3 + 5x_4 = 7 - 6x_1 - 8x_2 \end{cases}$$

y ahora resolvemos en las variables x_3 y x_4 quedando x_1 y x_2 libres. Si lo hacemos por Gauss resulta que este sistema es equivalente al asociado a la submatriz final

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

que hemos obtenido con las operaciones elementales. Por tanto el sistema equivalente es

$$\begin{cases} x_3 \qquad = 1 - 3x_1 - 4x_2 \\ \qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

con x_1 y x_2 libres. Vectorialmente esciribimos que toda solución del sistema se escribe como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2.5. Ejercicios

1. Usar la Regla de Cramer para resolver

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Utilizar la definición de determinante y calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \text{ y } \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

3. Calcula los siguientes determinantes usando sus propiedades y efectuando un número mínimo de operaciones:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Demostrar sin necesidad de calcularlos, que los siguientes determinantes son cero:

$$\begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \cos^2 c & 1 & \sin^2 c \end{vmatrix}.$$

5. Probar que $|r\ A| = r^n\,|A|$ (se supone que A es una matriz $n \times n$), y que si $A = -A^T$ con n impar entonces $|A| = 0$.

6. ¿Por qué $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$?

7. Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante

$$(x, y, z) \to T(x, y, z) = (x + 2y + z,\ 3x + y + 2z,\ 3x + 2y + 2z),$$

probar que es invertible y hallar la matriz asociada a T^{-1}.

8. ¿Para qué valores de m el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + \ y + z = 0 \end{cases}$$

tiene soluciones no triviales?

9. Encontrar un polinomio f de grado 2 tal que $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$ y $f(3) = 6$.

10. Encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores de a.

11. Estudiar para los distintos valores de a y b el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y + bz = 0 \\ x + ay + 2z = b - 2 \\ x + ay + bz = a - 1 \end{array} \right. .$$